

亏格不为 1 的二次可逆 LV 系统的极限环分支*

吴莎, 吴奎霖

贵州大学数学与统计学院, 贵州 贵阳 550025

摘要: 主要研究两个亏格不为 1 的二次可逆 Lotka-Volterra 系统的周期环域在小扰动下产生极限环的个数问题. 应用完全切比雪夫系统的性质来判定该系统的二阶 Melnikov 函数的零点个数, 从而证明了在二次扰动下, 这两个系统的周期环域能分支出两个极限环.

关键词: 可逆 LV 系统; Abel 积分; 极限环; 亏格 1

中图分类号: O175.21 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137(2023)06-0127-08

Bifurcation of limit cycles for quadratic reversible Lotka-Volterra systems with non-genus one

WU Sha, WU Kuilin

School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang 550025, China

Abstract: The number of limit cycles bifurcated from the periodic annulus of two quadratic reversible Lotka-Volterra systems with non-genus 1 under small bifurcations is studied. Using the properties of complete Chebyshev systems to estimate the number of zeros of second-order Melnikov function, it is proven that the number of limit cycles bifurcated from the periodic annulus of the two quadratic reversible Lotka-Volterra systems are both 2 under quadratic perturbations.

Key words: reversible Lotka-Volterra system; Abelian integral; limit cycles; genus one

自从 Hilbert 第 16 个问题被提出以来, 极限环个数的问题就成为平面微分系统定性理论研究的热点问题之一. 我们研究具有小扰动项的多项式可积系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{M} \frac{\partial H}{\partial y} + \varepsilon F(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} = \frac{1}{M} \frac{\partial H}{\partial x} + \varepsilon G(x, y, \varepsilon), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $M(x, y)$ 是对应 $H(x, y)$ 的积分因子. 用环性表示多项式系统在小扰动下分支出的最大极限环个数. 研究 Abel 积分 $I(h)$ 孤立零点个数问题涉及弱化的 Hilbert 第 16 问题. 系统 (1) 的后继函数可表示为

$$d(h, \theta) = \theta M_1(h) + \theta^2 M_2(h) + \cdots + \theta^k M_k(h) + \cdots,$$

其中 $d(h, \theta)$ 定义在流的一个横截线段上, 这个流由哈密顿函数 $H = h$ 给出. 称 $M_k(h)$ 为 k 阶 Melnikov 函数. 未扰可积系统 $(1)_{\varepsilon=0}$ 的周期环域在扰动下产生极限环个数的上界等于 $d(h, \varepsilon)$ 中第一个非零的 Melnikov 函数 $M_k(h)$ 的零点个数.

在文献 (Zoladek, 1994) 里, 中心在原点的平面二次系统分为以下几类:

* 收稿日期: 2022-09-27

录用日期: 2023-02-26

网络首发日期: 2023-07-27

基金项目: 国家自然科学基金(11661017); 贵州省科学技术基金(黔科合基础[2020]1Y405)

作者简介: 吴莎(1998年生), 女; 研究方向: 微分方程定性理论及应用; E-mail: zhangwusha44@163.com

通信作者: 吴奎霖(1981年生), 男; 研究方向: 微分方程定性理论及应用; E-mail: sci.klwu@gzu.edu.cn

$$\begin{aligned}
\text{哈密顿系统}(Q_3^H): & \quad \dot{z} = -iz + z^2 + 2|z|^2 + (b + ic)\bar{z}^2, \\
\text{余维4系统}(Q_4): & \quad \dot{z} = -iz + 4z^2 + 2|z|^2 + (b + ic)\bar{z}^2, \quad |b + ic| = 2, \\
\text{可逆系统}(Q_3^R): & \quad \dot{z} = -iz + z^2 + (b + ic)\bar{z}^2, \\
\text{Lotka-Volterra系统}(Q_3^{LV}): & \quad \dot{z} = -iz + az^2 + 2|z|^2 + b\bar{z}^2,
\end{aligned}$$

其中 $z = -xi + y$, a, b, c 表示任意实常数. Zoladek(1994)称一个可逆二次系统为通有的, 如果它不属于上面分类中的其他几类. 反之, Iliev(1998)证明: 对于通有情形, 只需要研究一阶 Melnikov 函数 $M_1(h)$ 的零点个数; 对应退化情形, 需要研究高阶 Melnikov 函数 $M_2(h)$ 或 $M_3(h)$ (只针对哈密顿三角系统). 如果二次中心属于哈密顿情形 Q_3^H (i.e. $n = 2$ 所对应的弱化 Hilbert 第 16 问题), Horozov et al.(1994), Li(2002)证明其环性为 2. 对于 Q_4 中的通有系统, Gavrilov et al.(2009)证明了其环性小于等于 8, 其后 Zhao(2011)将其环性降低到 5. Zoladek(1994)证明了 Q_3^{LV} 中的通有系统的环性为 2. 到目前为止, Q_3^R 的环性仍是公开问题. Liu(2012)证明了 Q_3^R 环性不超过 4. Gavrilov et al.(2000)证明 $Q_3^H \cap Q_3^R$ 的环性为 2. Iliev(1996)证明了哈密顿三角形 Q_3^H 的环性为 3, 之后 Iliev(1997)又证明了 $Q_4 \cap Q_3^R$ 中的退化系统环性为 2. 对于 $Q_3^{LV} \cap Q_3^R$, 它可表示为

$$\dot{z} = -iz + z^2 + b\bar{z}^2,$$

或

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + 2(1 - b)xy, \\ \dot{y} = x + (1 + b)x^2 - (1 + b)y^2, \end{cases} \quad (2)$$

其中 b 是一个实数. 当 $b \neq 1$ 时, 系统(2)可化为

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(1 + x), \\ \dot{y} = x - Fx^2 + Fy^2. \end{cases} \quad (3)$$

系统(3)在二次小扰动下的方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(1 + x) + \varepsilon f(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} = x - Fx^2 + Fy^2 + \varepsilon g(x, y, \varepsilon), \end{cases} \quad (4)$$

其中 ε 是一个小参数, f 和 g 是关于 ε, x, y 的二次多项式. 如果系统(4)的积分曲线是椭圆曲线(即代数曲线的亏格为 1 或代数曲线的次数不超过 5 次), Gautier et al.(2009)把亏格 1 的二次可逆 Lotka-Volterra 系统 ($Q_3^R \cap Q_3^{LV}$) 分为 11 种情形: (lv1)-(lv5) 和 (rlv1)-(rlv6), 并且给出了一个猜想: 当原点为二次可逆 Lotka-Volterra 系统的中心时, 系统(rlv1)的周期环域在二次小扰动下的环性为 3, 其他 10 类系统所对应的环性为 2. 到目前为止, 上述 11 种情形的环性问题已经被解决, 详情参考文献(Iliev, 1998; Li et al., 2009; Grau et al., 2011; Shao et al., 2011; Shao et al., 2013; Peng et al., 2014; Wu et al., 2014). 之前的研究结果主要关注于积分曲线是亏格 1 的二次中心. 我们研究积分曲线是非亏格 1 的 Lotka-Volterra 系统(4), 即考虑 $F = \frac{1}{3}$ 和 $F = -\frac{4}{3}$ 这两种特殊情况, 其积分曲线可转化为 6 次代数曲线. 下面是本文的主要结果.

定理 1 当 $F = \frac{1}{3}$ 和 $F = -\frac{4}{3}$, 系统(3)在二次扰动下的周期环环性为 2.

1 预备知识

我们借助切比雪夫系统性质证明主要结果. 首先介绍了切比雪夫系统的定义以及相关的一些结论.

定义 1 令 $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)$ 是开区间 $L \subset \mathbb{R}$ 上的解析函数.

(a) 如果任何非平凡线性组合

$$\alpha_0 f_0(x) + \alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_{n-1} f_{n-1}(x)$$

在 L 上至多有 $n - 1$ 个孤立零点, 则 $(f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x))$ 是 L 上的一个切比雪夫系统(简称, T-系统).

(b) 如果对于任意的 $k = 1, 2, \dots, n$, $(f_0(x), f_1(x), \dots, f_{k-1}(x))$ 是 L 上的一个切比雪夫系统, 则称 $(f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x))$ 是 L 上的一个完全切比雪夫系统(简称, CT-系统).

(c) 如果对于任意的 $k = 1, 2, \dots, n$, 所有非平凡线性组合

$$\alpha_0 f_0(x) + \alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_{k-1} f_{k-1}(x)$$

在 L 上至多有 $k - 1$ 个孤立零点(计算重数), 则称 $(f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x))$ 是 L 上的一个广义的完全切比雪夫系统(简称, ECT-系统).

显然, ECT-系统是CT-系统, 反之不成立. ECT-系统考虑零点重数, 但CT-系统不考虑零点重数. 下面介绍ECT-系统的一些性质.

定义 2 令 $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)$ 是开区间 $L \subset \mathbb{R}$ 上的解析函数. $(f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x))$ 在 $x \in L$ 处的连续朗斯基行列式为

$$W[f_0, \dots, f_{n-1}](x) = \det(f_{j-1}^{(i-1)}(x))_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{vmatrix} f_0(x) & \dots & f_{n-1}(x) \\ f_0'(x) & \dots & f_{n-1}'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_0^{(n-1)}(x) & \dots & f_{n-1}^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

引理 1 (Borwein et al., 1995) $(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ 是 L 上的一个 ECT-系统, 当且仅当对任意的 $k = 0, 1, \dots, n - 1$,

$$W[f_0, \dots, f_{k-1}](x) \neq 0, \text{ 对所有的 } x \in L.$$

Iliev(1998)给出了系统(3)在二次扰动下的二阶Melnikov函数.

引理 2 (Iliev, 1998) 系统(3)周期环域在二次扰动下所对应的二阶Melnikov函数为

$$M_2(h) = \oint_{\gamma_h} (1+x)^{2F-1} \left(ay + \frac{by}{1+x} + \frac{cx}{y} \right) dx,$$

其中 a, b, c 是任意常数.

定理 2 (Grau et al., 2011) 考虑Abel积分

$$I_i(h) = \oint_{\gamma_h} f_i(x) y^{2s-1} dx, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

其中对于任意 $h \in (0, h_0)$, γ_h 是原点周围的水平椭圆曲线 $\{A(x) + B(x)y^{2m} = h\}$. 设 σ 是关于 $A(x)$ 的对合, 即 $A(x) = A(\sigma(x))$. 定义

$$\ell_i(x) = \frac{f_i}{A'B^{\frac{2s-1}{2m}}}(u) - \frac{f_i}{A'B^{\frac{2s-1}{2m}}}(\sigma(u)).$$

若 $(\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{n-1})$ 是 $(0, x_r)$ 上的一个CT-系统, 并且 $s > m(n-2)$, 其中 x_r 是 γ_h 与 x 轴最右边交点的横坐标, 则 $(I_0, I_1, \dots, I_{n-1})$ 是 $(0, h_0)$ 上的一个ECT-系统.

引理 3 (Grau et al., 2011) 令 γ_h 是水平椭圆曲线簇 $\{A(x) + B(x)y^{2m} = h\}$, 考虑一个函数 F , 使得 $\frac{F}{A'}$ 在 $x = 0$ 处解析. 则对于任意 $k \in \mathbb{N}$, 有

$$\int_{\gamma_h} F(x) y^{k-2} dx = \int_{\gamma_h} G(x) y^k dx,$$

其中 $G(x) = \frac{2}{k} \left(\frac{BF}{A'} \right)'(x) - \left(\frac{B'F}{A'} \right)(x)$.

2 定理1的证明

当 $F = \frac{1}{3}$ 时, 系统(3)有1个中心 $(0, 0)$, 3个鞍点 $(3, 0), (-1, -2), (-1, 2)$. 除此之外, 这里有3条不变直线, 分别是 $x = -1, y = \pm \frac{x-3}{2}$, 它们构成了系统的1个异宿轨; 当 $F = -\frac{4}{3}$ 时, 系统(3)有1个中心 $(0, 0)$, 1个鞍点 $(-\frac{3}{4}, 0)$, 1个稳定结点 $(-1, \frac{1}{2})$ 和1个不稳定结点 $(-1, -\frac{1}{3})$, 如图1所示.

当 $F = \frac{1}{3}$ 时, 系统(3)的一个积分因子 $\mu(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$, 对应的首次积分为

$$H_1(x, y) = A(x) + B(x)y^2,$$

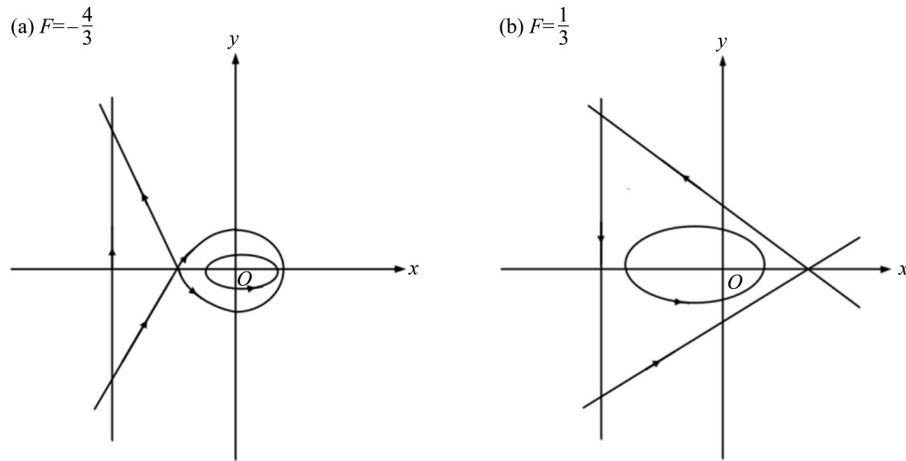


图1 系统(3)的局部相图

Fig. 1 The local phase diagram of system (3)

其中

$$A(x) = \frac{9}{4} - \frac{(1+x)^{\frac{2}{3}} \cdot (x-3)^2}{4}, \quad B(x) = (1+x)^{\frac{2}{3}}.$$

围绕系统(3)中心的周期环域为

$$\gamma_h = \left\{ (x, y) \mid H_1(x, y) = h, \quad 0 < h < \frac{9}{4} \right\}.$$

当 $F = -\frac{4}{3}$, 系统(3)的一个积分因子是 $m(x) = (1+x)^{-\frac{11}{3}}$, 对应的首次积分为

$$H_2(x, y) = \frac{9}{4} - \frac{(1+x)^{-\frac{8}{3}} \cdot (4x+3)^2}{4} + (1+x)^{-\frac{8}{3}} y^2.$$

对应(3)中心的周期环域为

$$\Gamma_h = \left\{ (x, y) \mid H_2(x, y) = h, \quad 0 < h < \frac{9}{4} \right\}.$$

下面我们讨论 $F = \frac{1}{3}$ 时, 系统(3)的二阶 Melnikov 函数的零点个数. 由分部积分可得

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_h} (1+x)^i y dx &= \frac{1}{i+1} \oint_{\gamma_h} (1+x)^{i+1} \frac{x - Fx^2 + Fy^2}{y(1+x)} dx \\ &= \frac{1}{i+1} \oint_{\gamma_h} (1+x)^i \left(\frac{x - Fx^2}{y} \right) dx + \frac{F}{i+1} \oint_{\gamma_h} (1+x)^i y dx, \end{aligned}$$

即

$$\oint_{\gamma_h} (1+x)^i y dx = \frac{1}{i+1-F} \oint_{\gamma_h} (1+x)^i \left(\frac{x - Fx^2}{y} \right) dx.$$

从而有

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_h} (1+x)^{-\frac{4}{3}} y dx &= -\frac{3}{2} \oint_{\gamma_h} (1+x)^{-\frac{4}{3}} \left(\frac{x - \frac{1}{3}x^2}{y} \right) dx, \\ \oint_{\gamma_h} (1+x)^{-\frac{1}{3}} y dx &= 3 \oint_{\gamma_h} (1+x)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{x - \frac{1}{3}x^2}{y} \right) dx. \end{aligned}$$

经线性组合可得

$$M_2(h) = \tau_0 I_0(h) + \tau_1 I_1(h) + \tau_2 I_2(h),$$

其中

$$I_0(h) = \oint_{\gamma_h} (1+x)^{-\frac{4}{3}} \frac{x}{y} dx, \quad I_1(h) = \oint_{\gamma_h} (1+x)^{-\frac{1}{3}} \frac{x}{y} dx, \quad I_2(h) = \oint_{\gamma_h} (1+x)^{\frac{2}{3}} \frac{x}{y} dx,$$

τ_0, τ_1, τ_2 是任意常数. 设

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1+u, \quad x \in (-1, 3),$$

则

$$dx = 3(1+u)^2 du, \quad u \in (-1, u_0), \quad \text{其中 } u_0 = \sqrt[3]{4} - 1 \approx 0.5874,$$

$$A(u) = \frac{9}{4} - \frac{(1+u)^2 \cdot [(1+u)^3 - 4]^2}{4}, \quad B(u) = (1+u)^2.$$

从而

$$I_0(h) = 3 \oint_{\gamma_h} \frac{(1+u)^3 - 1}{(1+u)^2 y} du, \quad I_1(h) = 3 \oint_{\gamma_h} \frac{(1+u)[(1+u)^3 - 1]}{y} du, \quad I_2(h) = 3 \oint_{\gamma_h} \frac{(1+u)^4[(1+u)^3 - 1]}{y} du.$$

下面借助 Grau et al.(2011) 给出的判别法(定理2)证明 $(I_0(h), I_1(h), I_2(h))$ 构成一个 ECT-系统.

由引理3有

$$I_0(h) = 3 \oint_{\gamma_h} \frac{(5u^3 + 15u^2 + 15u - 3)y}{(u^3 + 3u^2 + 3u - 3)^2(1+u)^2} du = \frac{3}{h} \oint_{\gamma_h} \frac{(5u^3 + 15u^2 + 15u - 3)(A(u) + B(u)y^2)y}{(u^3 + 3u^2 + 3u - 3)^2(1+u)^2} du$$

$$= \frac{1}{4h} \oint_{\gamma_h} \frac{g_0(u)y^3}{(u^2 + 3u + 3)^2(u^3 + 3u^2 + 3u - 3)^4(1+u)^2} du,$$

其中

$$g_0(u) = 35u^{15} + 595u^{14} + 4760u^{13} + 23418u^{12} + 77952u^{11} + 181818u^{10} + 295560u^9 + 314226u^8$$

$$+ 166311u^7 - 54351u^6 - 149364u^5 - 60912u^4 + 56538u^3 + 67878u^2 + 18144u - 3888.$$

同理可得

$$I_1(h) = \frac{1}{2h} \oint_{\gamma_h} \frac{(1+u)g_1(u)y^3}{(u^2 + 3u + 3)^2(u^3 + 3u^2 + 3u - 3)^4} du,$$

$$I_2(h) = -\frac{1}{4h} \oint_{\gamma_h} \frac{(1+u)^4 g_2(u)y^3}{(u^2 + 3u + 3)^2(u^3 + 3u^2 + 3u - 3)^4} du,$$

其中

$$g_1(u) = 10u^{15} + 170u^{14} + 1360u^{13} + 6705u^{12} + 22470u^{11} + 53235u^{10} + 89460u^9 + 102465u^8$$

$$+ 68400u^7 + 4617u^6 - 37584u^5 - 30294u^4 + 1296u^3 + 18630u^2 + 13932u + 3888,$$

$$g_2(u) = 13u^{15} + 221u^{14} + 1768u^{13} + 8532u^{12} + 26628u^{11} + 52416u^{10} + 51120u^9 - 29700u^8$$

$$- 171603u^7 - 229311u^6 - 90396u^5 + 105948u^4 + 124254u^3 - 810u^2 - 55080u - 19440.$$

记 σ 是关于 $A(u)$ 的对合, 即 $A(u) = A(\sigma(u))$. 为了方便计算朗斯基行列式, 假设 $z = \sigma(u)$,

$$\ell_i(u) = \frac{f_i}{A'B^{\frac{3}{2}}}(u) - \frac{f_i}{A'B^{\frac{3}{2}}}(\sigma(u)) = L_i(u, z).$$

下面利用定理2证明 $\{\ell_0, \ell_1, \ell_2\}$ 在 $(0, \sqrt[3]{4} - 1)$ 上构成一个 CT-系统. 事实上, 因为朗斯基行列式更容易计算, 所以下面证明 $\{\ell_0, \ell_1, \ell_2\}$ 构成一个 ECT-系统. 由于

$$A(u) - A(z) = \frac{1}{4}(-z+u)(u^3 + u^2z + uz^2 + z^3 + 4u^2 + 4uz + 4z^2 + 6u + 6z)$$

$$\times (u^4 + z^4 + 4u^3 + 4z^3 + 6u^2 + 6z^2 - 6),$$

这表明 $z = \sigma(u)$ 被定义为

$$q(u, z) = u^3 + u^2z + uz^2 + z^3 + 4u^2 + 4uz + 4z^2 + 6u + 6z,$$

并且

$$\sigma'(u) = -\frac{3u^2 + 2uz + z^2 + 8u + 4z + 6}{u^2 + 2uz + 3z^2 + 4u + 8z + 6}.$$

接下来借助数学软件来证明以下引理.

引理 4 在 $F = \frac{1}{3}$ 时, $\{\ell_0(u), \ell_1(u), \ell_2(u)\}$ 是开区间 $(0, \sqrt[3]{4} - 1)$ 上的一个 ECT-系统.

证明 由引理 1 可知, 通过计算三个朗斯基行列式在所给区间没有零点即可证明此引理. 首先,

$$W[L_0(u, z)] = \frac{(u - z)\phi_0(u, z)}{24uz(1 + u)^6(1 + z)^6C(u)^3C(z)^3D(u)^5D(z)^5},$$

其中 $\phi_0(u, z)$ 是一个 42 次多项式,

$$C(u) = u^2 + 3u + 3, \quad D(u) = u^3 + 3u^2 + 3u - 3.$$

$q(u, z)$ 和 $\phi_0(u, z)$ 关于 z 的结式为:

$$R_0(u, z) = (u + 1)^{15}(u^2 + 3u + 3)^2(u^3 + 3u^2 + 3u - 3)^{15}r_0(u), \tag{5}$$

其中 $r_0(u)$ 是一个关于 u 的 62 次多项式. 注意, $r_0(0) = 14\,281\,868\,906\,496$, $r_0(\sqrt[3]{4} - 1) > 0$, 并且 $r_0(u)$ 在 $(0, 1)$ 上有最小值 $r_0(0.0964) = 1.7633 \times 10^{12}$. 因此, $\phi_0(u, z) = 0$ 和 $q(u, z) = 0$ 没有相同的根, 这意味着对任意的 $u \in (0, \sqrt[3]{4} - 1)$ 有 $W[L_0(u, z)] \neq 0$.

计算可得

$$W[L_0(u, z), L_1(u, z)] = \frac{\phi_1(u, z)}{48u^2z^2(1 + u)^{10}(1 + z)^{10}(u^2 + 2uz + 3z^2 + 4u + 8z + 6)C(u)^5C(z)^5D(u)^9D(z)^9},$$

其中 $\phi_1(u, z)$ 是一个关于 (u, z) 的 76 次多项式. $q(u, z)$ 和 $\phi_1(u, z)$ 关于 z 的结式为:

$$R_1(u, z) = 1\,024u^3(u + 1)^{21}(u^2 + 3u + 3)^5(u^3 + 3u^2 + 3u - 3)^{29}r_1(u), \tag{6}$$

其中 $r_1(u)$ 是一个关于 u 的 98 次多项式. 通过计算,

$$r_1(0) = 412\,894\,405\,728\,420\,456\,038\,400, \quad r_1(\sqrt[3]{4} - 1) > 0,$$

且 $r_1(u)$ 在 $(0, 1)$ 上有最小值 $r_1(0.5587) = 9.0013 \times 10^{22}$. 由此可以断言, 对于任意的 $u \in (0, \sqrt[3]{4} - 1)$, $W[L_0(u, z), L_1(u, z)] \neq 0$.

最后, 根据计算可得

$$W[L_0(u, z), L_1(u, z), L_2(u, z)] = \frac{\phi_2(u, z)}{64u^3z^3(1 + u)^{12}(1 + z)^{12}(u^2 + 2uz + 3z^2 + 4u + 8z + 6)^3C(u)^7C(z)^7D(u)^{12}D(z)^{12}},$$

其中 $\phi_2(u, z)$ 是一个 93 次多项式. $q(u, z)$ 和 $\phi_2(u, z)$ 关于 z 的结式为:

$$R_2(u, z) = 4\,194\,304u^6(u + 1)^{21}(u^2 + 3u + 3)^8(u^3 + 3u^2 + 3u - 3)^{37}r_2(u), \tag{7}$$

其中 $r_2(u)$ 是一个关于 u 的 146 次多项式. 通过计算, $r_2(0) > 0$, $r_2(\sqrt[3]{4} - 1) > 0$ 且 $r_2(u)$ 在 $(0, 1)$ 上有最小值 $r_2(0.5889) = 2.5199 \times 10^{33}$. 所以 $W[L_0(u, z), L_1(u, z), L_2(u, z)] \neq 0$, 对于所有的 $u \in (0, \sqrt[3]{4} - 1)$. 由定理 2 即可得这个引理.

当 $F = -\frac{4}{3}$ 时, 可以得到

$$M_2(h) = s_0J_0(h) + s_1J_1(h) + s_2J_2(h),$$

其中

$$J_0(h) = \oint_{\gamma_h} (1 + x)^{-\frac{14}{3}} \frac{x}{y} dx, \quad J_1(h) = \oint_{\gamma_h} (1 + x)^{-\frac{11}{3}} \frac{x}{y} dx, \quad J_2(h) = \oint_{\gamma_h} (1 + x)^{-\frac{8}{3}} \frac{x}{y} dx,$$

s_0, s_1, s_2 是任意常数.

令 $1 + x = \frac{1}{1 + X}$, $y = \frac{Y}{1 + X}$. 则

$$H_2\left(\frac{1}{1 + X} - 1, \frac{Y}{1 + X}\right) = \frac{9}{4} - \frac{(1 + X)^{\frac{2}{3}}(X - 3)^2}{4} + (1 + X)^{\frac{2}{3}}Y^2 = H_1(X, Y),$$

且

$$J_0(h) = \oint_{\gamma_h} \frac{(1 + X)^{\frac{8}{3}}X}{Y} dX, \quad J_1(h) = \oint_{\gamma_h} \frac{(1 + X)^{\frac{5}{3}}X}{Y} dX, \quad J_2(h) = \oint_{\gamma_h} \frac{(1 + X)^{\frac{2}{3}}X}{Y} dX.$$

令 $(1+X)^{\frac{1}{3}} = 1+v$ 可得

$$J_0(h) = 3 \oint_{\gamma_h} \frac{(1+v)^{10}[(1+v)^3 - 1]}{Y} dv, \quad J_1(h) = 3 \oint_{\gamma_h} \frac{(1+v)^7[(1+v)^3 - 1]}{Y} dv,$$

$$J_2(h) = 3 \oint_{\gamma_h} \frac{(1+v)^4[(1+v)^3 - 1]}{Y} dv.$$

与 $F = \frac{1}{3}$ 时计算方法相同, 可以得到

$$J_0(h) = -\frac{1}{4h} \oint_{\gamma_h} \frac{(1+v)^{10}G_0(v)Y^3}{(v^2+3v+3)^2(v^3+3v^2+3v-3)^4} dv,$$

$$J_1(h) = -\frac{2}{h} \oint_{\gamma_h} \frac{(1+v)^7G_1(v)Y^3}{(v^2+3v+3)^2(v^3+3v^2+3v-3)^4} dv,$$

$$J_2(h) = -\frac{1}{4h} \oint_{\gamma_h} \frac{(1+v)^4G_2(v)Y^3}{(v^2+3v+3)^2(v^3+3v^2+3v-3)^4} dv,$$

其中

$$G_0(v) = 133v^{15} + 2261v^{14} + 18088v^{13} + 88218v^{12} + 285432v^{11} + 620802v^{10} + 851400v^9 + 518562v^8$$

$$- 434151v^7 - 1138941v^6 - 695628v^5 + 333720v^4 + 596646v^3 + 89586v^2 - 162000v - 42768,$$

$$G_1(v) = 8v^{15} + 136v^{14} + 1088v^{13} + 5301v^{12} + 17094v^{11} + 36855v^{10} + 49320v^9 + 26433v^8 - 33840v^7$$

$$- 75735v^6 - 43416v^5 + 24624v^4 + 40500v^3 + 5184v^2 - 12474v - 3888,$$

$$G_2(v) = 13v^{15} + 221v^{14} + 1768v^{13} + 8532v^{12} + 26628v^{11} + 52416v^{10} + 51120v^9 - 29700v^8 - 171603v^7$$

$$- 229311v^6 - 90396v^5 + 105948v^4 + 124254v^3 - 810v^2 - 55080v - 19440.$$

引理5 当 $F = -\frac{4}{3}$ 时, $\{\ell_0(v), \ell_1(v), \ell_2(v)\}$ 是开区间 $(0, \sqrt[3]{4} - 1)$ 上的一个 ECT-系统.

证明 通过计算可得

$$W[L_2(v, z)] = \frac{(v-z)\varphi_0(v, z)}{24vzC(v)^3C(z)^3D(v)^5D(z)^5},$$

$$W[L_1(v, z), L_2(v, z)] = \frac{\varphi_1(v, z)}{12v^2z^2(v^2+2vz+3z^2+4v+8z+6)C(v)^5C(z)^5D(v)^9D(z)^9},$$

$$W[L_0(v, z), L_1(v, z), L_2(v, z)]$$

$$= \frac{\varphi_2(v, z)}{16v^3z^3(1+v)^{12}(1+z)^{12}(v^2+2vz+3z^2+4v+8z+6)^3C(v)^7C(z)^7D(v)^{12}D(z)^{12}},$$

其中 $\varphi_0(v, z), \varphi_1(v, z), \varphi_2(v, z)$ 分别是一个关于 (v, z) 的 36, 68, 97 次多项式. $q(v, z)$ 和 $\varphi_i(v, z)$ 关于 z 的结式分别为

$$p_0(v) = (v^2+3v+3)^2(v^3+3v^2+3v-3)^{10}\psi_0(v),$$

$$p_1(v) = 16384v^3(v^2+3v+3)^5(v^3+3v^2+3v-3)^{22}\psi_1(v),$$

$$p_2(v) = -46036680704v^6(v^2+3v+3)^8(v^3+3v^2+3v-3)^{30}\psi_2(v),$$

其中 $\psi_0(v), \psi_1(v), \psi_2(v)$ 分别是一个关于 v 的 74, 104, 158 次多项式, 且

$$\psi_0(0) = -595077871104000,$$

$$\psi_1(0) = 364318593289782755328000,$$

$$\psi_2(0) = -296597812177538144422199707041792000.$$

通过计算我们知道: $\psi_0(0)$ 是 $\psi_0(v)$ 在 $(0, 1)$ 上的最大值; 当 $v \approx 0.5700$ 时, $\psi_1(v)$ 在 $(0, 1)$ 上有最小值 7.3993×10^{21} ; 对于 $\psi_2(v)$, 由 Sturm 定理可知其在 $(0, \sqrt[3]{4} - 1)$ 上没有零点. 所以, 对于任意 $u \in (0, \sqrt[3]{4} - 1)$, 3 个朗斯基行列式 $W[L_0(v, z), L_1(v, z), L_2(v, z)], W[L_1(v, z), L_2(v, z)], W[L_2(v, z)]$ 在 $(0, \sqrt[3]{4} - 1)$ 上无零点. 从而可知 $\{\ell_0(v), \ell_1(v), \ell_2(v)\}$ 是开区间 $(0, \sqrt[3]{4} - 1)$ 上的一个 ECT-系统.

定理1的证明 由引理2, 引理4和引理5可得定理1.

参考文献:

- BORWEIN P B, ERDÉLYI T, 1995. Polynomials and polynomial inequalities[M]. New York: Springer Verlag.
- GAUTIER S, GAVRILOV L, ILIEV I D, 2009. Perturbations of quadratic centers of genus one[J]. Discrete Contin Dyn Syst, 25(2): 511–535.
- GAVRILOV L, ILIEV I D, 2000. Second-order analysis in polynomially perturbed reversible quadratic Hamiltonian systems[J]. Ergod Th Dynam Sys, 20(6): 1671–1686.
- GAVRILOV L, ILIEV I D, 2009. Quadratic perturbations of quadratic codimension-four centers[J]. J Math Anal Appl, 357(1): 69–76.
- GRAU M, MAÑOSAS F, VILLADELPRAT J, 2011. A Chebyshev criterion for abelian integrals[J]. Trans Amer Math Soc, 363(1): 109–129.
- HOROZOV E, ILIEV I D, 1994. On the number of limit cycles in perturbations of quadratic Hamiltonian systems[J]. Proc Lond Math Soc, 69(1): 198–224.
- ILIEV I D, 1996. The cyclicity of the period annulus of the quadratic Hamiltonian triangle[J]. J Differ Equ, 128(1): 309–326.
- ILIEV I D, 1997. Inhomogeneous Fuchs equations and the limit cycles in a class of near-integrable quadratic systems[J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 127(6): 1207–1217.
- ILIEV I D, 1998. Perturbations of quadratic centers[J]. Bull Sci Math, 122(2): 107–161.
- LI C, LLIBRE J, 2009. The cyclicity of period annulus of a quadratic reversible Lotka-Volterra system[J]. Nonlinearity, 22(12): 2971–2979.
- LI C Z, ZHANG Z, 2002. Remarks on 16th weak Hilbert problem for $n = 2$ [J]. Nonlinearity, 15(6): 1975–1992.
- LIU C J, 2012. The cyclicity of period annuli of a class of quadratic reversible systems with two centers[J]. J Differ Equ, 252(10): 5260–5273.
- PENG L P, FENG Z S, LIU C J, 2014. Quadratic perturbations of a quadratic reversible Lotka-Volterra systems with two centers [J]. Discrete Contin Dyn Syst, 34(11): 4807–4826.
- SHAO Y, CHUNXIANG A, 2013. Quadratic perturbations of a class of quadratic reversible Lotka-Volterra systems[J]. Int J Bifur Chaos, 23(8): 1350137.
- SHAO Y, ZHAO Y L, 2011. The cyclicity and period function of a class of quadratic reversible Lotka-Volterra system of genus one [J]. J Math Anal Appl, 377(2): 817–827.
- WU K L, LIANG H H, 2014. Limit cycles bifurcating from a quadratic reversible Lotka-Volterra system with a center and three saddles[J]. Chin Ann Math Ser B, 35: 25–32.
- ZHAO Y L, 2011. On the number of limit cycles in quadratic perturbations of quadratic codimension-four centres[J]. Nonlinearity, 24(9): 2505–2522.
- ZOLADEK H, 1994. Quadratic systems with center and their perturbations[J]. J Differ Equ, 109(2): 223–273.

(责任编辑 冯兆永)